

Total number of printed pages-31

3 (Sem-5/CBCS) MAT RE1/RE2

2022

**MATHEMATICS**

(Regular Elective)

Answer the Questions from any one Option.

**OPTION-A**

*(Number Theory)*

Paper : MAT-RE-5016

**OPTION-B**

*(Discrete Mathematics)*

Paper : MAT-RE-5026

Full Marks : 80

Time : Three hours

**The figures in the margin indicate  
full marks for the questions.**

Answer **either** in English **or** in Assamese.

Contd.

### OPTION-A

1. Choose the correct options : (any ten)  
 $1 \times 10 = 10$

শুদ্ধ উত্তৰ বাচি উলিওৱা : (যিকোনো দহটা)

(i) If যদি  $36 \equiv x \pmod{37}$ , then  $x$  is

তেতিয়া,  $x$  ৰ মান হব :

- (a) 36
- (b) 1
- (c) 10
- (d) None of the above

ওপৰৰ এটাও নহয়

(ii) The set of integers such that every integer is congruent modulo  $m$  to exactly one integer of the set is called — modulo  $m$ .

অখণ্ড সংখ্যাৰ সংহতিটোক য'ত প্রতিটো অখণ্ড সংখ্যাই সংহতিটোক সঠিক এটা অখণ্ড সংখ্যাৰ সৈতে congruent modulo  $m$  হয় তাক — modulo  $m$  বুলি কোৱা হয়।

- (a) Reduced residue system  
হ্রাসমান অৱশেষ প্ৰণালী
- (b) Complete residue system  
সম্পূৰ্ণ অৱশেষ প্ৰণালী
- (c) Elementary residue system  
প্ৰাথমিক অৱশেষ প্ৰণালী
- (d) None of the above

ওপৰৰ এটাও নহয়

(iii) If  $a$  is a whole number and  $p$  is a prime number, then according to Fermat's theorem.

যদিহে  $a$  এটা পূৰ্ণ সংখ্যা আৰু  $p$  এটা মৌলিক সংখ্যা হয়, তেতিয়াহলে ফাৰ্মাটৰ উপপাদ্য অনুযায়ী

(a)  $a^p - a$  is divisible by  $p$

$a^p - a$ ,  $p$  ৰ বিভাজ্য হব

(b)  $a^p - 1$  is divisible by  $p$

$a^p - 1$ ,  $p$  ৰ বিভাজ্য হব

(c)  $a^{p-1} - 1$  is divisible by  $p$

$a^{p-1} - 1$ ,  $p$  ৰ বিভাজ্য হব

(d)  $a^{p-1} - a$  is divisible by  $p$

$a^{p-1} - a$ ,  $p$  ৰ বিভাজ্য হব

(iv) The product of three consecutive positive integers is divisible by

তিনিটা ক্ৰমিক ধনাত্মক অখণ্ড সংখ্যাৰ পূৰণফলক সম্পূৰ্ণৰূপে বিভাজন কৰিব পৰা সংখ্যাটো হব :

(a) 4

(b) 6

(c) 7

(d) 9

(v) The unit place digit of  $12^{73}$

$12^{73}$  ৰ একক স্থানৰ অংকটো হ'ব :

- (a) 4
- (b) 6
- (c) 8
- (d) 2

(vi) The highest power of 7 that divides  $49!$  Is

$49!$  ক হ'ব কৰিব পৰা 7 ৰ সৰ্বোচ্চ ঘাত হ'ব :

- (a) 7
- (b) 8
- (c) 5
- (d) 10

(vii) If যদি  $ac \equiv bc \pmod{m}$  and আৰু  $d = \gcd(m, c)$

- (a)  $a \equiv b \pmod{\frac{m}{d}}$
- (b)  $a \equiv c \pmod{\frac{m}{d}}$
- (c)  $a \equiv m \pmod{b}$
- (d)  $a \equiv m \pmod{\frac{b}{a}}$

(viii) Let  $p$  be an odd prime. Then  $x^2 \equiv -1 \pmod{p}$  has a solution if  $p$  is of the form

ধৰাইল,  $p$  এটা অযুগ্ম মৌলিক সংখ্যা। তেতিয়া,

$x^2 \equiv -1 \pmod{p}$  এটা সমাধান থাকিব, যদিহে  $p$  ৰ আকাৰ

- (a)  $4k+1$
- (b)  $4k$
- (c)  $4k+3$
- (d) None of the above

ওপৰৰ এটাও নহয়

(ix) If a positive integer  $n$  divides the difference of two integers  $a$  and  $b$ , then

যদি এটা ধনাত্মক অখণ্ড সংখ্যা  $n$  য়ে  $a$  আৰু  $b$  অখণ্ড সংখ্যা দুটাৰ অন্তৰফলক বিভাগ কৰে, তেতিয়া হলে,

- (a)  $a \equiv b \pmod{n}$
- (b)  $a = b \pmod{n}$
- (c)  $a \equiv n \pmod{b}$
- (d) None of the above

ওপৰৰ এটাও নহয়

(x) Which theorem states that "if  $p$  is prime, then  $a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$ "?

তলৰ কোনটো উপপাদ্যৰ মতে "যদিহে  $p$  এটা মৌলিক সংখ্যা তেতিয়া হলে,  $a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$ "

- (a) Dirichlet's theorem  
Dirichlet ৰ উপপাদ্য
- (b) Wilson's theorem  
Wilson ৰ উপপাদ্য
- (c) Euler's theorem  
Euler ৰ উপপাদ্য
- (d) Fermat's little theorem  
Fermat ৰ little উপপাদ্য

(xi) If যদি  $100! \equiv x \pmod{101}$ , then  $x$  is

তেতিয়া  $x$  ৰ মান

- (a) 99
- (b) 100
- (c) 101
- (d) None of the above  
ওপৰৰ এটাও নহয়

(xii) For any integer  $a$  satisfying  $13^3 \equiv x \pmod{3}$ , then  $x$  is

যিকোনো অখণ্ড সংখ্যা  $x$  ৰ বাবে  $13^3 \equiv x \pmod{3}$  হলে  $x$  ৰ মান হব :

- (a) 1
- (b) 2
- (c) 0
- (d) 3

(xiii) If the integers  $a, b > 0$ , then set of all integers of the form  $ma + nb$  ( $m, n \in \mathbb{Z}$ ) includes

যদি  $a, b > 0$ , দুটা অখণ্ড সংখ্যা হয়। তেতিয়া  $ma + nb$  ( $m, n \in \mathbb{Z}$ ) আকাৰৰ সকলো অখণ্ড সংখ্যাৰ সংহতিটো

- (a) their gcd but not lcm  
সিহতৰ gcd কিন্তু lcm নহয়
- (b) their lcm but not gcd  
সিহতৰ lcm কিন্তু gcd নহয়
- (c) both lcm and gcd  
lcm আৰু gcd দুয়োটাই
- (d) neither gcd nor lcm  
gcd আৰু lcm এটাও নহয়

(xiv) One of the solution of the congruence  $15x \equiv 6 \pmod{21}$  is

$15x \equiv 6 \pmod{21}$  congruence টোৰ এটা সমাধান হ'ল :

- (a) 5
- (b) 6
- (c) 7
- (d) 8

(xv) The remainder when  $2^{50}$  is divided by 7 is

$2^{50}$  ক 7 ৰে হৰণ কৰিলে ভাগশেষটো হ'ব :

- (a) 2
- (b) 4
- (c) 6
- (d) 8

(xvi) Number of integers which are less than and co-prime to 108 is

108 তকৈ সৰু আৰু তাৰ সহ মৌলিক অখণ্ড সংখ্যাৰ মুঠ সংখ্যা হ'ব :

- (a) 18
- (b) 17
- (c) 15
- (d) 36

(xvii) Euler phi-function of a prime number  $p$  is

$p$  এটা মৌলিক সংখ্যা হলে তাৰ Euler phi function হ'ব :

- (a)  $p$
- (b)  $p-1$
- (c)  $p/2-1$
- (d) None of the above

ওপৰৰ এটাও নহয়

(xviii) The solution of pair of linear congruence  $x \equiv 3 \pmod{5}$  and  $x \equiv 4 \pmod{3}$  is

$x \equiv 3 \pmod{5}$  আৰু  $x \equiv 4 \pmod{3}$  linear congruence দুটাৰ সমাধান হ'ব :

- (a)  $x \equiv 13 \pmod{5}$
- (b)  $x \equiv 28 \pmod{5}$
- (c)  $x \equiv 13 \pmod{15}$
- (d)  $x \equiv 13 \pmod{3}$

2. Answer **any five** questions :  $2 \times 5 = 10$

যিকোনো পাঁচটা প্রশ্নৰ উত্তৰ কৰা :

(a) Evaluate the exponent of 5 in 500!

500! 5 ৰ exponent নির্ণয় কৰা।

(b) Find  $\tau(756)$ .

$\tau(756)$  ৰ মান উলিওৱা।

(c) Find the number of zeroes at the end of the product of first seventy natural numbers.

প্রথম 70টা স্বাভাৱিক সংখ্যাৰ পূৰণফলৰ শেষৰ পিনে থকা মুঠ শূন্যৰ সংখ্যা নির্ণয় কৰা।

(d) Find all the prime numbers  $p$  such that  $p^2 + 2$  is also a prime number.

আটাইবোৰ মৌলিক সংখ্যা  $p$  নির্ণয় কৰা যাতে  $p^2 + 2$  ও এটা মৌলিক সংখ্যা হয়।

(e) If  $m$  and  $n$  are integers such that  $\gcd(m, n) = 1$ , then  $\tau(mn) = \tau(m) \tau(n)$

যদি  $m$  আৰু  $n$  দুটা অখণ্ড সংখ্যা হয় যাতে,  $\gcd(m, n) = 1$  তেতিয়া প্রমাণ কৰা যে,

$$\tau(mn) = \tau(m) \tau(n)$$

(f) If  $\gcd(a, b) = 1$ , then find  $\gcd(a + b, a^2 - ab + b^2)$ .

যদি  $\gcd(a, b) = 1$ , তেতিয়া  $\gcd(a + b, a^2 - ab + b^2)$  ৰ মান উলিওৱা।

(g) If যদি  $a \equiv b \pmod{n}$  and আৰু  $m | n$ , then show that  $a \equiv b \pmod{m}$ .

তেতিয়া দেখুওৱা যে,  $a \equiv b \pmod{m}$ ।

(h) Find the solution of following linear Diophantine equation  $4x - 7y = -20$ .

$4x - 7y = -20$  বৈখিক Diophantine সমীকৰণটোৰ সমাধান নির্ণয় কৰা।

(i) If  $x$  be any real number. Then show that যদি  $x$  এটা যিকোনো বাস্তৱ সংখ্যা হয়, তেতিয়াহলে দেখুওৱা যে,

$$[x] + [-x] = \begin{cases} 0 & \text{if } x \text{ is an integer} \\ \text{otherwise} \\ -1 & \text{যদি } x \text{ এটা অখণ্ড সংখ্যা অন্য} \\ & \text{থাই।} \end{cases}$$

(j) Show that if দেখুওৱা যে যদিহে  $185a \equiv 1295 \pmod{259}$  then তেতিয়া,  $a \equiv 7 \pmod{37}$ .

3. Answer **any four** questions :  $5 \times 4 = 20$   
যিকোনো চাৰিটা প্ৰশ্নৰ উত্তৰ কৰা :

(a) If  $p_n$  is the  $n^{\text{th}}$  prime, then show that

$$\frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} + \dots + \frac{1}{p_n} \text{ is not an integer.}$$

যদি  $n$  তম মৌলিক সংখ্যাটো  $p_n$  হয়, তেন্তে দেখুওৱা

$$\text{যে, } \frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} + \dots + \frac{1}{p_n} \text{ অখণ্ড সংখ্যা নহয়।}$$

(b) Show that, the set of integers  $\{5, 13, 27, 31, 34\}$  is a complete Residue System (RRS) modulo 5.

দেখুওৱা যে,  $\{5, 13, 27, 31, 34\}$  অখণ্ড সংখ্যাৰ সংহতিটো এটা সম্পূৰ্ণ Residue System (RRS) modulo 5.

(c) If  $k$  denotes the number of distinct prime factors of positive integer  $n$ . Prove that  $\sum_{d|n} |\mu(d)| = 2^k$ .

যদিহে এটা ধনাত্মক অখণ্ড সংখ্যা  $n$  ৰ ভিন্ন মৌলিক উৎপাদকৰ সংখ্যা  $k$ , তেতিয়া প্ৰমাণ কৰা যে,

$$\sum_{d|n} |\mu(d)| = 2^k.$$

(d) If  $n$  is a prime integer with  $n \geq 2$ , then show that  $(n-1)! \equiv -1 \pmod{n}$ .

যদি  $n$  এটা মৌলিক অখণ্ড সংখ্যা য'ত  $n \geq 2$ , তেতিয়া দেখুওৱা যে,  $(n-1)! \equiv -1 \pmod{n}$ .

(e) If  $a_1 a_2 \dots a_m$  is a complete residue system modulo  $m$ , and if  $k$  is a positive integer with  $(k, m) = 1$ , then  $ka_1 + b, ka_2 + b, \dots, ka_m + b$ , is a complete residue system modulo  $m$  for any integer  $b$ .

যদি  $a_1 a_2 \dots a_m$  এটা সম্পূৰ্ণ residue system modulo  $m$  হয় আৰু  $k$  এটা ধনাত্মক অখণ্ড সংখ্যা য'ত  $(k, m) = 1$ , তেতিয়া  $ka_1 + b, ka_2 + b, \dots, ka_m + b$  এটা যিকোনো অখণ্ড সংখ্যা  $b$  ৰ সম্পূৰ্ণ residue system modulo  $m$  হ'ব।

(f) Find last two digits of  $54^{380}$ .

$54^{380}$  ৰ শেষৰ দুটা অংক নিৰ্ণয় কৰা।

- (g) Solve  $3[x] = x + 2\{x\}$  where  $[x]$  denotes greatest integer less or equal to  $x$  and  $\{x\}$  denotes the fractional part of  $x$ .

সমাধান কৰা :  $3[x] = x + 2\{x\}$ ,

য'ত  $[x]$  য়ে  $x$  ৰ সমান নতুবা  $x$  তকৈ সৰু বৃহত্তম অখণ্ড সংখ্যাক বুজায় আৰু  $\{x\}$  য়ে  $x$  ৰ ভগ্নাংশক নিৰ্দেশ কৰে।

- (h) Find all integers that leave a remainder of 4 when divided by 11 and leaves a remainder of 3 when divided by 17.

এনেকুৱা আটাইবোৰ অখণ্ড সংখ্যা নিৰ্ণয় কৰা, যিবোৰক 11 ৰে হৰণ কৰিলে 4 ভাগশেষ আৰু 17 ৰে হৰণ কৰিলে 3 ভাগশেষ থাকে।

- (i) Show that if  $p$  is an odd prime, then  $2(p-3)! \equiv -1 \pmod{p}$ .

যদি  $p$  এটা অযুগ্ম মৌল হয়, তেন্তে দেখুওৱা যে,  $2(p-3)! \equiv -1 \pmod{p}$ ।

- (j) If  $\phi$  is Euler's phi function, then find  $\phi(\phi(7056))$ .

যদি  $\phi$  এটা Euler ৰ phi ফলন হয়, তেন্তে  $\phi(\phi(7056))$  ৰ মান নিৰ্ণয় কৰা।

4. Answer **any four** of the following questions :  
10×4=40

তলৰ প্ৰশ্নসমূহৰ যিকোনো চাৰিটাৰ উত্তৰ কৰা :

- (i) (a) If  $a, b \neq 0$  and  $c$  be any three integers and  $d = \gcd(a, b)$ . Then show that  $ax + by = c$  has a solution iff  $d | c$ .

Furthermore, show that if  $x_0$  and  $y_0$  is a particular solution of  $ax + by = c$ , then any other solution

of the equation is  $x' = x_0 - \frac{b}{d}t$  and

$$y' = y_0 + \frac{a}{d}t, \quad t \text{ is an integer.}$$

যদি  $a, b \neq 0$  আৰু  $c$  যিকোনো তিনিটা অখণ্ড সংখ্যা আৰু  $d = \gcd(a, b)$  হয়, তেন্তে দেখুওৱা যে,  $ax + by = c$  সমীকৰণটোৰ সমাধান থাকিব যদি আৰু একমাত্ৰ যদিহে  $d | c$ , আকৌ দেখুওৱা যে, যদিহে  $x_0$  আৰু  $y_0$   $ax + by = c$  ৰ বিশেষ সমাধান তেতিয়াহলে সমীকৰণটোৰ আন সমাধান

$$x' = x_0 - \frac{b}{d}t \quad \text{আৰু} \quad y' = y_0 + \frac{a}{d}t \quad \text{য'ত } t$$

এটা অখণ্ড সংখ্যা।



(b) Find the general solution of  
 $10x - 8y = 42$ . 7+3=10

$10x - 8y = 42$  ৰ সাধাৰণ সমাধান নিৰ্ণয়  
কৰা।

(ii) (a) Prove that the quadratic  
congruence  $x^2 + 1 \equiv 0 \pmod{p}$ ,  
where  $p$  is an odd prime, has a  
solution iff  $p \equiv 1 \pmod{4}$ .

প্রমাণ কৰা যে,  $x^2 + 1 \equiv 0 \pmod{p}$  য'ত  $p$   
এটা অযুগ্ম মৌল, দ্বিঘাত congruence ৰ  
এটা সমাধান থাকিব যদি আৰু একমাত্ৰ যদিহে  
 $p \equiv 1 \pmod{4}$ .

(b) If যদি  $n > 1$  and আৰু  $\gcd(a, n) = 1$ ,  
then prove that তেতিয়াহলে প্রমাণ কৰা  
যে,  $a^{\phi(n)} \equiv 1 \pmod{n}$  5+5=10

(iii) (a) Prove that  $\tau(n)$  is an odd integer  
iff  $n$  is a perfect square.

প্রমাণ কৰা যে,  $\tau(n)$  এটা অযুগ্ম অখণ্ড সংখ্যা  
যদি আৰু যদিহে  $n$  এটা সম্পূৰ্ণ বৰ্গ হয়।

(b) Prove that  $\prod_{d|n} d = n^{\frac{\tau(n)}{2}}$ , for any  
positive integer  $n$ . 5+5=10

প্রমাণ কৰা যে,  $\prod_{d|n} d = n^{\frac{\tau(n)}{2}}$ , যিকোনো  
ধনাত্মক অখণ্ড সংখ্যা  $n$  ৰ বাবে।

(iv) (a) If  $a_1, a_2, \dots, a_k$  is a reduced residue  
system modulo  $m$ , then  $k = \phi(m)$ .  
যদি  $a_1, a_2, \dots, a_k$  এটা reduced residue  
system modulo  $m$  হয়, তেতিয়া হলে  
দেখুওৱা যে,  $k = \phi(m)$ .

(b) Find the remainder when  $11^{35}$  is  
divided by 13. 5+5=10  
 $11^{35}$  ক 13 ৰে হৰণ কৰিলে ভাগশেষ কিমান  
হব নিৰ্ণয় কৰা।

(v) State and prove Chinese remainder  
theorem. Also solve the system of  
congruence.

Chinese remainder উপপাদ্যটো লিখি প্রমাণ কৰা।  
লগতে তলৰ congruence প্ৰণালীটোৰ সমাধান নিৰ্ণয়  
কৰা।

$$x \equiv 1 \pmod{2}$$

$$x \equiv 2 \pmod{3}$$

$$x \equiv 3 \pmod{5}$$

(vi) (a) Show that if  $a_1, a_2, \dots, a_{\varphi(m)}$  is a RRS modulo  $m$ , where  $m$  is a positive integer with  $m \neq 2$ , then  $a_1 + a_2 + \dots + a_{\varphi(m)} \equiv 0 \pmod{m}$ .

দেখুওরা যে, যদিহে  $a_1, a_2, \dots, a_{\varphi(m)}$  এটা RRS modulo  $m$  হয় য'ত  $m$  এটা ধনাত্মক অখণ্ড সংখ্যা যাতে  $m \neq 2$ , তেতিয়াহলে,  $a_1 + a_2 + \dots + a_{\varphi(m)} \equiv 0 \pmod{m}$ ।

(b) If  $a, b$  and  $m$  are three integers such that  $\gcd(a, m) = 1$  and  $ab \equiv 0 \pmod{m}$ , then show that  $b \equiv 0 \pmod{m}$ .  $5+5=10$

যদি  $a, b$  আৰু  $m$  তিনিটা অখণ্ড সংখ্যা য'ত  $\gcd(a, m) = 1$  আৰু  $ab \equiv 0 \pmod{m}$ , তেতিয়া, দেখুওরা যে  $b \equiv 0 \pmod{m}$ ।

(vii) If  $a, b, c, d, n$  are integers and  $n > 0$ , then establish the following

যদি  $a, b, c, d, n$  অখণ্ড সংখ্যা য'ত  $n > 0$ , তেতিয়া প্রমাণ কৰা যে,

(a) if যদি  $a \equiv b \pmod{n}$  then তেতিয়া  $ac \equiv bc \pmod{n}$

(b) if যদি  $a \equiv b \pmod{n}$  then তেতিয়া  $ac \equiv bc \pmod{n}$  for  $c > 0$

(c) if যদি  $a \equiv b \pmod{n}$  and আৰু  $c \equiv d \pmod{n}$  then তেতিয়া,  $a \pm c \equiv b \pm d \pmod{n}$

(d) if যদি  $a \equiv b \pmod{n}$  and আৰু  $c \equiv d \pmod{n}$  then তেতিয়া,  $ac \equiv bc \pmod{n}$

(viii) (a) Prove that every positive integers  $n (> 1)$  can be expressed uniquely as a product of primes.

প্রমাণ কৰা যে, প্রতিটো ধনাত্মক অখণ্ড সংখ্যা  $n (> 1)$  ক একক ভাবে মৌলিক সংখ্যা সমূহৰ পূৰণফল হিচাপে প্রকাশ কৰিব পাৰি।

(b) Determine all the solution of

$$f(x) = x^2 - 7x + 2 \pmod{5^3}$$

$$f(x) = x^2 - 7x + 2 \pmod{5^3} \text{ ৰ}$$

আটাইবোৰ সমাধান নির্ণয় কৰা।  $5+5=10$

(ix) If  $x$  be any real number. Then show that  $1+3+3+3=10$

যদি  $x$  এটা যিকোনো বাস্তব সংখ্যা হয়, তেতিয়াহলে দেখুওঁৱা যে,

(a)  $[x] \leq x < [x]+1$

(b)  $[x+m] = [x]+m$ ,  $m$  is any integer

$m$  যিকোনো অখণ্ড সংখ্যা

(c)  $[x]+[y] \leq [x+y]$

(d)  $\left[ \frac{[x]}{m} \right] = \left[ \frac{x}{m} \right]$ , if  $m$  is a positive integer

যদি  $m$  এটা ধনাত্মক অখণ্ড সংখ্যা

(x) (a) Define the arithmetic function  $\tau$ . If  $n$  is a square-free integer having  $r$  prime factors, prove that  $\tau(n) = 2^r$ .

Arithmetic ফলন  $\tau$  ৰ সংজ্ঞা দিয়া। যদি  $n$  এটা  $r$  টা মৌলিক উৎপাদক বিশিষ্ট বর্গমুক্ত অখণ্ড সংখ্যা হয়, তেন্তে প্রমাণ কৰা যে,  $\tau(n) = 2^r$ .

(b) If  $p$  is a prime, prove that  $\phi(p^k) = p^k - p^{k-1}$ . Also establish that  $\phi(n)$  is an even number for  $n > 2$ .  $5+5=10$

যদি  $p$  মৌলিক, প্রমাণ কৰা যে,

$\phi(p^k) = p^k - p^{k-1}$  আকৌ,  $n > 2$  ৰ

বাবে উপস্থাপন কৰা যে,  $\phi(n)$  এটা যুগ্ম সংখ্যা।

## OPTION-B

### (Discrete Mathematics)

Paper : MAT-RE-5026

1. Give very short answer of the following :  
(any ten)  $1 \times 10 = 10$

তলৰ প্ৰশ্নবোৰৰ চমুকৈ উত্তৰ দিয়া : (যিকোনো দহটা)

- (a) Write the conditions to be fulfilled by an ordered set.

এটা ক্ৰমিক সংহতিৰ চৰ্তসমূহ লিখা।

- (b) When two ordered sets are said to be isomorphic ?

দুটা ক্ৰমিক সংহতি কেতিয়া একেী সমকাৰক হব ?

- (c) Define a bounded lattice.

এটা পৰিবদ্ধ লেটিচৰ সংজ্ঞা দিয়া।

- (d) Under what condition a poset is said to be a lattice ?

কি চৰ্তত এটা আংশিক ক্ৰমিক সংহতি লেটিচ হব ?

- (e) Give an example of an ordered set.

এটা ক্ৰমিক সংহতিৰ উদাহৰণ দিয়া।

- (f) Write the boundedness law of Boolean algebra.

বুলীয় বীজগণিতৰ পৰিবদ্ধকাৰক সূত্ৰটো লিখা।

- (g) Define a totally ordered set.

এটা সম্পূৰ্ণ ক্ৰমিক সংহতিৰ সংজ্ঞা দিয়া।

- (h) Product of two lattices is a lattice.

(State true **or** false)

দুটা লেটিচৰ গুণফল এটা লেটিচ হয়।

(উক্তিটো সত্য নে মিছা)

- (i) Write the binary operations defined for a lattice.

এটা লেটিচৰ দ্বৈত প্ৰক্ৰিয়াবোৰ লিখা।

- (j) Write the simplified Boolean expression of  $(x+y)(\bar{x}+z)(y+z)$ .

$(x+y)(\bar{x}+z)(y+z)$  সবলিকৃত বুলীয় বাশি হিচাপে লিখা।

- (k) Define a sub lattice.

এটা উপ-লেটিচৰ সংজ্ঞা দিয়া।

- (l) Write the De Morgan's law.

ডি' মৰগেন নিয়মটো লিখা।

(m) Define a complemented lattice.

এটা পূৰক লেটিচৰ উদাহৰণ দিয়া।

(n) Give an example of tautology.

এটা সত্যস্তিৰ উদাহৰণ দিয়া।

(o) State the absorption law of Boolean algebra.

এটা বুলীয় বীজগণিতৰ এৰজৰচন নিয়মটো লিখা।

(p) Define conjunctive normal form.

কনজাংটিভ নৰমেল কি লিখা।

(q) Write the commutative law of a lattice.

এটা লেটিচৰ ক্রম বিনিময় নিয়মটো লিখা।

(r) Is  $(\mathbb{Z}^+, /)$  a lattice?

$(\mathbb{Z}^+, /)$  টো লেটিচ হয়নে?

2. Give answer of the following: **(any five)**  
2×5=10

তলৰ প্ৰশ্নবোৰৰ উত্তৰ দিয়া : (যিকোনো পাঁচটা)

(a) Define least and greatest element of an ordered set.

এটা ক্রমিক সংহতিৰ লঘিষ্ঠতম আৰু গৰিষ্ঠতম মৌলৰ সংজ্ঞা দিয়া।

(b) Prove that the set of natural number form a poset under the relation ' $\leq$ '.

প্ৰমাণ কৰা যে স্বাভাৱিক সংখ্যাৰ সংহতিটো ' $\leq$ ' সম্বন্ধৰ দ্বাৰা এটা আংশিক ক্রমিক সংহতি হয়।

(c) Express the following as sum of product form:  $A + B\bar{C}$ .

$A + B\bar{C}$  ক গুণৰ যোগফল হিচাপে প্ৰকাশ কৰা।

(d) Give an example of a bounded lattice.

এটা পৰিবদ্ধ লেটিচৰ উদাহৰণ দিয়া।

(e) Simplify:  $xy' + xy + x'y$

সৰলকৰণ :  $xy' + xy + x'y$

(f) Write the properties of a modular lattice.

মডুলাৰ লেটিচৰ বৈশিষ্ট্যবোৰ লিখা।

(g) Give an example of a distributive lattice.

এটা বিতৰণ লেটিচৰ উদাহৰণ দিয়া।

(h) Prove that in a Boolean algebra  $B$ ,

প্ৰমাণ কৰা যে এটা বুলীয় বীজগণিত  $B$ -এ

$(a')' = a, \forall a \in B$

(i) Express  $E(x, y, z) = x(y'z')$  as complete sum of products form.

সম্পূৰ্ণ গুণৰ যোগফল হিচাপে দেখুওৱা।

(j) Verify that : সত্যতা প্ৰমাণ কৰা।

$$(p \wedge q) \vee (p \wedge \sim q) \equiv p$$

3. Answer the following : **(any four)**  $5 \times 4 = 20$

তলৰ প্ৰশ্নবোৰৰ উত্তৰ দিয়া : (যিকোনো চাৰিটা)

(a) What is logic gate? Mention some important logic gate and explain *any one* with truth table.

ল'জিক গেটৰ সংজ্ঞা কি। এটা আৱল্যকিয় ল'জিক গেটৰ নাম লিখা আৰু তাৰে এটা সত্যতামান তালিকাসহ ব্যাখ্যা কৰা।

(b) Express the Boolean function  $f(x, y, z) = x + y'z$  as sum of minterms.

তলত উল্লেখ কৰা বুলীয় ফলনটোক মিনটাৰ্মৰ যোগফল হিচাপে প্ৰকাশ কৰা,  $f(x, y, z) = x + y'z$ .

(c) If  $L$  is a lattice and  $a, b, c \in L$  then prove that

$$a \wedge (b \vee c) \geq (a \wedge b) \vee (a \wedge c)$$

যদি  $L$  এটা লেটিচ হয় আৰু  $a, b, c \in L$ , প্ৰমাণ কৰা যে

$$a \wedge (b \vee c) \geq (a \wedge b) \vee (a \wedge c)$$

(d) Prove that in a distributive lattice, if an element has a complement, then it is unique.

প্ৰমাণ কৰা যে যদি এটা বিতৰণ লেটিচৰ এটা মৌলৰ পূৰক থাকে তেন্তে সেইটো একক হয়।

(e) Find the greatest lower bound and least upper bound of the sets  $\{3, 9, 12\}$  and  $\{1, 2, 4, 5, 10\}$  if exist in the poset  $(\mathbb{Z}^+, 11)$ .

$(\mathbb{Z}^+, 11)$  আংশিক ক্ৰমিক সংহতিৰ অধিনৰ  $\{3, 9, 12\}$  আৰু  $\{1, 2, 4, 5, 10\}$  সংহতিৰ গৰিষ্ঠতম নিম্ন পৰিবদ্ধ আৰু লঘিষ্ঠ উচ্চ পৰিবদ্ধ নিৰ্ণয় কৰা।

(f) Show with an example that union of two sublattice may not be a lattice.

এটা উদাহৰণৰ সহায়ত দেখুওৱা যে দুটা উপ-লেটিচৰ সংযোগ এটা উপ-লেটিচ নহবও নাবে।

(g) Prove that in a Boolean algebra, the elements 0 and 1 are unique.

প্রমাণ কৰা যে এটা বুলীয় বীজগণিতত 0 আৰু 1 মৌল দুটা একক।

(h) Simplify the following Boolean expression

তলৰ বুলীয় ৰালিটো সৰল কৰা

$$z(y+z)(x+y+z)$$

4. Answer the following : **(any four)**  $10 \times 4 = 40$

তলৰ প্ৰশ্নবোৰৰ উত্তৰ দিয়া : (যিকোনো চাৰিটা)

(a) For a Boolean algebra  $B$ , prove the following :

বুলীয় বীজগণিত  $B$  ৰ কাৰণে তলত দিয়াসমূহ প্ৰমাণ কৰা :

$$(i) (a+b)' = a'.b'$$

$$(ii) (a.b)' = a' + b'$$

(b) Simplify the following Boolean expressions :

তলৰ বুলীয় ৰাশিসমূহ সৰল কৰা

$$(i) z(y+z)(x+y+z)$$

$$(ii) xy + x'z + yz$$

$$(iii) x+y(x+y)+x(x'+y)$$

(c) Prove that in any lattice  $(L, \wedge, \vee)$  the following are equivalent :

প্ৰমাণ কৰা যে কোনো লেটিচ  $(L, \wedge, \vee)$  ৰ বাবে তলত দিয়াসমূহ সমতুল্য

$$(i) a \wedge (b \vee c) = (a \wedge b) \vee (a \wedge c)$$

$$(ii) a \vee (b \wedge c) = (a \vee b) \wedge (a \vee c)$$

$$a, b, c \in L$$

(d) Let  $A = \{1, 2, 3, 4\}$  and consider the relation given by

যদি  $A = \{1, 2, 3, 4\}$  আৰু সম্পৰ্ক দিয়া হৈছে

$$R = \{(1,1), (2,1), (2,2), (3,1), (3,3), (3,4), (4,4)\}$$

Show that  $R$  is partial ordering and draw its Hasse diagram.

প্ৰমাণ কৰা যে আংশিক ক্ৰমিক আৰু ইয়াৰ হেছ চিত্ৰ অংকন কৰা।

(e) What is a Karnaugh map? Use Karnaugh map to simplify the following:

কৰ্ণফ্ মেপ কি? ইয়াৰ সহায়ত তলত দিয়াসমূহ সৰল কৰা

(i)  $ABC' + ABC$

(ii)  $A'B'C' + AB'C'$

(f) Prove the following identities using Boolean algebra:

তলত দিয়াসমূহ বুলীয় বীজগণিতৰ সহায়ত প্রমাণ কৰা :

(i)  $(a + b)(a' + c) = ac + ab$

(ii)  $ab + abc + a'b + ab'c = b + ac$

(iii)  $(a' + b)(a + b) = b$

(g) Represent the following in disjunctive normal form (dnf)

তলত দিয়াসমূহ ডিজোংকটিভ নৰমেল হিচাপে প্রকাশ কৰা

(i)  $(a + b)(a' + b')$

(ii)  $(bc + ac')(ab' + c)$

(iii)  $(a'b)(a + b) = b$

(h) Show that in a complemented distributive lattice the following are equivalent:

দেখুওৱা যে এটা পূৰ্বক বিতৰণ লেটিচৰ বাবে তলত দিয়া সমূহ সমতুল্য

(i)  $a \leq b$

(ii)  $a \wedge b' = 0$

(iii)  $a' \vee b = 1$

(iv)  $b' \leq a'$

(i) Prove that a non-empty finite poset has a greatest element.

(i) at most one greatest element

অতি বেচি এটা গৰিষ্ঠ মৌল থাকে

(ii) at most one least element.

অতি বেচি এটা লঘিষ্ঠ মৌল থাকে।

(j) Determine all the possible sublattices of  $D_{30}$ , where

$$D_{30} = \{1, 2, 3, 5, 6, 10, 15, 30\}$$

$D_{30}$  ৰ সকলো সম্ভাৱ্য উপ-লেটিচ বোৰ উলিওৱা

$$D_{30} = \{1, 2, 3, 5, 6, 10, 15, 30\}$$