

Total number of printed pages-8

3 (Sem-5/CBCS) MAT SE

2022

MATHEMATICS

(Skill Enhancement Course)

Paper : MAT-SE-5014

(Combinatorics and Graph Theory)

Full Marks : 50

Time : Two hours

**The figures in the margin indicate
full marks for the questions.**

Answer **either** in English **or** in Assamese.

1. Answer **any four** from the following :

1×4=4

তলৰ যিকোনো চাৰিটা প্ৰশ্নৰ উত্তৰ কৰা :

(a) A number plate contains two letters followed by four digits. How many different number plates can be made in total ?

এখন ইংৰাজী ভাষাৰ নম্বৰ প্লেটত দুটা বৰ্ণৰ পিছত চাৰিটা অংক আছে। কিমানখন ভিন্ন নম্বৰ প্লেট প্ৰস্তুত কৰা সম্ভব হব?

Contd.

(b) In how many ways you can arrange ten different students for a round-table conference ?

দহজন ছাত্রক কিমান ভিন্ন ধৰণে ঘূৰণীয়া মেজমেলৰ বাবে বহাব পাৰি?

(c) Find the number of different arrangements of the elements of the set $\{1, 2, 3, 4\}$.

$\{1, 2, 3, 4\}$ সংহতিটোৰ মৌল বিলাকক কিমান ভিন্ন ধৰণে সজাব পাৰি?

(d) Define a regular graph.

এটা নিয়মীয়া লেখৰ সংজ্ঞা দিয়া।

(e) Draw figures for K_5 and $K_{3,4}$.

K_5 আৰু $K_{3,4}$ ৰ এটাকৈ চিত্ৰ আঁকা।

(f) What do you mean by components of a graph ? Give example.

এটা লেখৰ শাখা বুলিলে কি বুজা? উদাহৰণ দিয়া।

(g) Define planar graph with example.

উদাহৰণেৰে সমতলীয় লেখৰ সংজ্ঞা দিয়া।

(h) Draw a graph with given degree sequence $(3, 3, 3, 3, 3, 3)$. Give justification if no such graph exist.

$(3, 3, 3, 3, 3, 3)$ ঘাত বিশিষ্ট শীৰ্ষ বিন্দুৰ এটা লেখৰ চিত্ৰ আঁকা। যদি স্থিত নহয় তাৰ কাৰণ ব্যাখ্যা কৰা।

2. Answer **any three** from the following questions : $2 \times 3 = 6$

তলৰ যিকোনো তিনিটা প্ৰশ্নৰ উত্তৰ কৰা :

(a) If we choose 5 points in the interior of a square of side 2 unit length, then prove that there is at least one pair of points which have distance less than $\sqrt{2}$ unit.

যদি আমি 2 একক দৈৰ্ঘ্যৰ এটা বৰ্গক্ষেত্ৰৰ ভিতৰত 5 টা বিন্দু লও, তেন্তে প্ৰমাণ কৰা যে তাত অন্ততঃ এযোৰ বিন্দু থাকিব, যাৰ মাজৰ দূৰত্ব $\sqrt{2}$ তকৈ কম।

(b) Suppose a simple graph has 15 edges, 3 vertices of degree 4 and all other vertices of degree 3. Find the number of vertices in the graph.

ধৰা এটা সৰল লেখৰ 15 টা বাহু আছে যাৰ 3 টা শীৰ্ষ বিন্দু 4-ঘাট বিশিষ্ট আৰু অন্য সকলোবোৰ শীৰ্ষ বিন্দু 3-ঘাট বিশিষ্ট। লেখটোৰ মুঠ শীৰ্ষ বিন্দুৰ সংখ্যা নিৰ্ণয় কৰা।

(c) Define bridge and cut-point of graph.

লেখৰ ব্ৰীজ আৰু কাট-পইণ্টৰ সংজ্ঞা দিয়া।

(d) How many terms are there in the expansion of $(x+y+z+r+s+t)^7$?

$(x+y+z+r+s+t)^7$ ৰ সম্প্রসাৰণত মুঠ পদৰ সংখ্যা কিমান থাকিব?

(e) Let G be a 3-regular graph with n vertices. Find the sum of the degree of vertices. Show that here n must be even.

G এটা n টা শীৰ্ষ বিন্দুৰ 3-নিয়মীত লেখ। G শীৰ্ষ বিন্দুসমূহৰ মুঠ ঘাত নির্ণয় কৰা। দেখুওৱা যে ইয়াত n ৰ মান যুগ্ম।

(f) Define an Eulerian graph with example.

উদাহৰণেৰে সৈতে অয়লাৰ লেখ এটাৰ সংজ্ঞা দিয়া।

3. Answer **any two** from the following questions : $5 \times 2 = 10$

তলৰ যিকোনো দুটা প্ৰশ্নৰ উত্তৰ কৰা :

(a) How many solutions does the equation $x + y + z = 12$ have where x , y , and z are non-negative integers less than 5 ?

$x + y + z = 12$, $x, y, z < 5$, সমীকৰণটোৰ অঋণাত্মক অখণ্ড সমাধানৰ মুঠ সংখ্যা কিমান ?

(b) Show that an edge of a graph is a bridge if and only if it belongs to no cycle.

দেখুওৱা যে লেখ এটাৰ বাহু এটা ব্ৰীজ হ'ব যদি আৰু যদিহে ই কোনো বৰ্তনীত নাথাকে।

(c) Suppose u, v be two vertices in a graph. Prove that every $u-v$ walk contains a $u-v$ path.

ধৰা u আৰু v এটা লেখৰ দুটা শীৰ্ষ বিন্দু। প্ৰমাণ কৰা যে প্ৰতিটো $u-v$ যাত্ৰাতে এটা $u-v$ পথ থাকিব।

(d) Show that a complete graph is a regular graph, but the converse may not be true.

দেখুওৱা যে সম্পূৰ্ণ লেখ এটা সদায় নিয়মীত লেখ, কিন্তু বিপৰীত উক্তিটো সঁচা নহ'বও পাৰে।

(e) In how many ways 6 boys and 4 girls can sit in a row ? In how many ways they can sit if no two girls come together ? In how many ways they can sit if girls come together ?

6 জন ল'ৰা আৰু 4 জনী ছোৱালীক এটা শাৰীত কিমান ধৰণে বহাব পাৰি? যদি দুজনী ছোৱালী কেতিয়াও একেলগে নহ'বে তেন্তে সিহঁতক কিমান ধৰণে বহাব পাৰি?

যদি ছোৱালী কেইজনী একেলগে বহে তেন্তে সিহতক কিমান ধৰণে বহাবে পাৰি?

- (f) Define bipartite graph. Give one example. Mention one property of complete bipartite graph. $2+1+2=5$

দ্বিপক্ষীয় লেখৰ সংজ্ঞা দিয়া আৰু এটা উদাহৰণ দাঙি ধৰা। সম্পূৰ্ণ দ্বিপক্ষীয় লেখৰ এটা ধৰ্ম উল্লেখ কৰা।

4. Answer **any three** from the following :

$$10 \times 3 = 30$$

তলৰ যিকোনো তিনিটা প্ৰশ্নৰ উত্তৰ কৰা :

- (a) Define degree of a graph. Define in-degree and out-degree of graph with examples. Prove that the number of odd degree vertices in a graph is always even. $1+2+2+5=10$

এটা লেখৰ ঘাতৰ সংজ্ঞা দিয়া। উদাহৰণেৰে সৈতে লেখৰ অন্তৰ্ভুক্ত আৰু বহিৰ্ভুক্ত ঘাতৰ সংজ্ঞা দিয়া। প্ৰমাণ কৰা যে লেখ এটাৰ অযুগ্ম ঘাতৰ শীৰ্ষবিন্দুৰ সংখ্যা সদায় যুগ্ম।

- (b) Prove that the maximum number of edges in a simple disconnected graph with n vertices and k components is

$$\frac{(n-k)(n-k+1)}{2}$$

প্ৰমাণ কৰা যে n টা শীৰ্ষবিন্দু আৰু k টা শাখা থকা এটা সৰল অসংযোগী লেখৰ সৰ্বোচ্চ বাহুৰ সংখ্যা

$$\frac{(n-k)(n-k+1)}{2}$$

- (c) Prove that the sum of the degrees of the vertices of any finite graph is even. Draw the graph $G(V, E)$ where

$$V = \{u, v, w, x, y, z\} \text{ and}$$

$$E = \{(u, w), (v, w), (w, x), (u, x), (x, z), (y, w), (v, y), (w, z)\}.$$

Verify the above statement in this graph. $5+5=10$

প্ৰমাণ কৰা যে সসীম লেখ এটাৰ শীৰ্ষবিন্দুৰ ঘাতসমূহৰ যোগফল সদায় যুগ্ম। $G(V, E)$ লেখটো অংকন কৰা য'ত $V = \{u, v, w, x, y, z\}$ আৰু

$$E = \{(u, w), (v, w), (w, x), (u, x), (x, z), (y, w), (v, y), (w, z)\}$$

ওপৰৰ উক্তিটো এই লেখটোৰ ক্ষেত্ৰত প্ৰমাণ কৰা।

- (d) Write a short note on the Knight's tour problem as a problem of graph theory.

লেখতত্ত্বৰ নাইট্‌চ টুৰ প্ৰব্লেমৰ ওপৰত এটি চমু টোকা লিখা।

- (e) Prove that every tournament has a directed Hamiltonian path.

প্ৰমাণ কৰা যে প্ৰতিটো টুৰ্ণামেণ্টতে এটি নিৰ্দেশিত হেমিল্টনীয় পথ থাকে।

- (f) Define a Hamiltonian graph. Draw a Hamiltonian graph. Prove that if G is a connected planar graph, then G has a vertex with degree ≤ 5 . $2+2+6=10$

হেমিল্টনীয় পথ এটিৰ সংজ্ঞা দিয়া। এটা হেমিল্টনীয় লেখ আঁকা। প্রমাণ কৰা যে যদি G এটা সংযুক্ত সমতলীয় লেখ হয়, তেন্তে G ৰ পাচ বা পাচতকৈ কম ঘাতৰ এটা শীৰ্ষবিন্দু থাকিব।

- (g) Define an Eulerian graph and state *any three* properties of Eulerian graph. Prove that a connected graph contains an Eulerian circuit if and only if each of its vertices is of even degree. $2+3+5=10$

অয়লাৰ পথ এটিৰ সংজ্ঞা দিয়া আৰু অয়লাৰ লেখৰ তিনিটা ধৰ্ম লিখা। প্রমাণ কৰা যে এটা সংযুক্ত লেখত অয়লাৰ লেখ এটা থাকিব যদি আৰু যদিহে ইয়াৰ শীৰ্ষবিন্দুসমূহ যুগ্ম ঘাতৰ হয়।

- (h) Define Block graphs and Cut point graphs giving examples with diagram.

$$5+5=10$$

উদাহৰণ আৰু চিত্ৰৰ সৈতে এটি খণ্ডলেখ আৰু এটি বিচ্ছিন্নকৰণীয় শীৰ্ষবিন্দুৰ সংজ্ঞা দিয়া।