Total number of printed pages–15

1 (Sem–2) PHY

2024

PHYSICS

Paper : PHY0200104

(Mathematical Physics & Electricity and Magnetism)

Full Marks : 45

Time : 2 hours

The figures in the margin indicate full marks for the questions.

Answer **either** *in English* **or** *in Assamese.*

1. Answer the following questions : 1×5=5

তলৰ প্ৰশ্নসমূহৰ উত্তৰ দিয়া ঃ

(a) What are the order and degree of the following differential equation ?

$$\frac{d^2y}{dx^2}+\frac{dy}{dx}+xy=0$$

Contd.

তলত দিয়া অৱকল সমীকৰণটোৰ মাত্ৰা (order) আৰু ঘাত (degree) কিমান ?

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{dy}{dx} + xy = 0$$

(b) Give an example of an anti-Hermitian matrix.

এটা প্ৰতি-হাৰমিছিয়ান মেট্ৰিক্সৰ উদাহৰণ দিয়া।

(c) What is the dimension of capacitance in terms of the fundamental quantities (M, L, T, I) ?

মৌলিক ৰাশি (M, L, T, I) ৰ আধাৰত ধাৰকত্বৰ মাত্ৰা নিৰ্ণয় কৰা।

(d) What is the SI unit of magnetic dipole moment ?

চৌম্বিক দ্বিমেৰু ভ্ৰামকৰ SI একক কি?

(e) What is meant by dielectric polarisation ?

পৰাবৈদ্যুতিক মেৰুকৰণ মানে কি বুজা?

2. Answer ***any five*** of the following questions : 2×5=10

তলত দিয়া প্ৰশ্নবোৰৰ ***যিকোনো পাঁচটাৰ*** উত্তৰ দিয়া ঃ

(a) The equation for radioactive decay of an element is given by,

$$\frac{dN(t)}{dt} = -\lambda N(t)$$

where $N(t)$ is the number the element at time t and λ is a constant. Given $N(0) = N_0$. Find $N(t)$.

এটা তেজস্ক্রিয় মৌলৰ অৱক্ষয়ৰ সমীকৰণটো হ'ল,

$$\frac{dN(t)}{dt} = -\lambda N(t)$$

য'ত $N(t)$ হৈছে t সময়ত থকা মৌলটোৰ সংখ্যা আৰু λ এটা ধ্রুৱক ৰাশি। তেতিয়া $N(t)$ নির্ণয় কৰা। প্ৰদত্ত যে $N(0) = N_0$ ।

(b) What is the difference between an ordinary differential equation and a partial differential equation ?

এটা সাধাৰণ অৱকল সমীকৰণ আৰু এটা আংশিক অৱকল সমীকৰণৰ মাজত পাৰ্থক্য কি?

(c) If A is an $n \times n$ matrix, show that

$$det(-A) = (-1)^n \, det(A)$$

যদিহে A এটা $n \times n$ মেট্ৰিক্স হয়, দেখুওৱা যে

$$det(-A) = (-1)^n \, det(A)$$

(d) Starting from the equation

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J}$$

show that

$$\oint \vec{B} . \vec{dl} = \mu_0 I$$

where the symbols have their usual meaning.

$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J}$ সমীকৰণটোৰ পৰা দেখুওৱা যে

$\oint \vec{B} . \vec{dl} = \mu_0 I$

য'ত চিহ্নবোৰে সাধাৰণতে জনা অৰ্থ বহন কৰে।

(e) A voltage of sinusoidal waveform is applied across a resistance. Show that the voltage and current in the resistance are in the same phase.

এডাল ৰোধকত ছিনুছয়ডেল তৰংগ ৰূপৰ বিভৱ প্ৰয়োগ কৰা হৈছে। দেখুওৱা যে বিভৱ আৰু বৈদ্যুতিক প্ৰবাহ একেটা দশাতে থাকে।

(f) An electric dipole of moment 5×10^{-8} coulomb meter has been placed in a uniform electric field of 2×10^{5} Newton/coulomb. Calculate the maximum torque that the field exerts on the dipole.

2×10^{5} এখন নিউটন/কুলম্ব মানৰ সুষম বৈদ্যুতিক ক্ষেত্ৰত 5×10^{-8} কুলম্ব মিটাৰ ভ্ৰামকৰ এটা বৈদ্যুতিক দ্বিমেৰু স্থাপন কৰা হৈছে। বৈদ্যুতিক ক্ষেত্ৰখনে দ্বিমেৰুটোৰ ওপৰত প্ৰয়োগ কৰা সৰ্বোচ্চ টৰ্ক নিৰ্ণয় কৰা।

(g) Show that

$$\nabla^2 V = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

where V is potential, ρ is charge density and ε_0 is permittivity of free space.

দেখুওৱা যে

$$\nabla^2 V = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

য'ত V, ρ আৰু ε_0 ক্ৰমান্বয়ে বিভৱ, আধান ঘনত্ব আৰু বায়ুশূন্য স্থানৰ বৈদ্যুতিক প্ৰৱেশ্যতা।

(h) Two parallel long straight wires at a distance $1m$ apart placed in air carry equal currents $10A$ in the same direction. Find the force per unit length of the wires. (Given permeability of air, $\mu = 4\pi \times 10^{-7}\ H/m$)

বায়ু মাধ্যমত 1 *মিঃ* ব্যৱধানত ৰখা দুডাল পোন দীঘল তাঁৰৰ প্ৰত্যেকৰ মাজেৰে একে দিশত 10 এম্পিয়াৰ বিদ্যুত চালিত হৈ আছে। তাঁৰ দুডালৰ প্ৰতি একক দৈৰ্ঘ্যত প্ৰয়োগ হোৱা বলৰ মান নিৰ্ণয় কৰা। প্ৰদত্ত যে বায়ুৰ প্ৰৱেশ্যতা, $\mu = 4\pi \times 10^{-7}$ *হেনৰি/মিঃ*।

(i) Show that the capacitance of an isolated metallic sphere of radius R is $4\pi\varepsilon_0 R$, where ε_0 is permittivity of free space.

দেখুওৱা যে পৃথকীকৃত ধাতৱীয় গোলক এটাৰ ধাৰকত্ব হৈছে $4\pi\varepsilon_0 R$, য'ত ε_0 হৈছে বায়ুশূন্য স্থানৰ বৈদ্যুতিক প্ৰৱেশ্যতা।

(j) What is wattless current in an L–C–R circuit ?

এটা L–C–R বৰ্তনীত ৱাটহীন প্ৰৱাহ মানে কি বুজা ?

3. Answer ***any four*** of the following questions : 5×4=20

তলত দিয়া প্ৰশ্নবোৰৰ ***যিকোনো চাৰিটাৰ*** উত্তৰ দিয়া ঃ

(a) Show that the following matrix is orthogonal.

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

তলৰ মেট্ৰিক্সটো লাম্বিক বুলি দেখুওৱা।

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

(b) Find the eigenvalues and eigenvectors of the following matrix.

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{pmatrix}$$

তলৰ মেট্ৰিক্সটোৰ আইগেনমান আৰু আইগেনভেক্টৰ বোৰ উলিওৱা।

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{pmatrix}$$

(c) Obtain the Gauss's law in a dielectric medium.

পৰাবৈদ্যুতিক মাধ্যমত গাউছৰ সূত্ৰটো উলিওৱা।

(d) A spherical shell of radius R has been kept at a constant potential V_0. Find an expression for the potential outside the shell at a distance r from the centre of the spherical shell using Laplace's equation.

R ব্যাসাৰ্ধৰ গোলাকাৰ খোল এটা V_0 সুস্থিৰ বিভৱত ৰখা হৈছে। লাপলাছৰ সমীকৰণটো ব্যৱহাৰ কৰি খোলটোৰ বাহিৰত ইয়াৰ কেন্দ্ৰৰ পৰা r দূৰত্বত অৱস্থিত এটা বিন্দুত বিভৱৰ প্ৰকাশ ৰাশি উলিওৱা।

(e) A $1m$ long wire of cross-sectional area $5\times10^{-4} cm^2$ carries a current of $10A$. Find the voltage drop in the wire.
Given : conductivity of the wire = $5\cdot8\times10^7 ohm^{-1}m^{-1}$.

1 *মিঃ* দৈৰ্ঘ্য আৰু 5×10^{-4} *ছেঃমিঃ* 2 প্ৰস্থচ্ছেদীয় কালিৰ তাঁৰ এডালত 10 এম্পিয়াৰ বিদ্যুত প্ৰবাহ চালিত হৈ আছে। তাঁৰ ডালত হোৱা বিভৱ পতনৰ মান নিৰ্ণয় কৰা। প্ৰদত্ত যে তাঁৰ ডালৰ বৈদ্যুতিক পৰিবাহিতা হ'ল $5\cdot8\times10^7$ *অম*$^{-1}$ *মিঃ*$^{-1}$।

(f) A capacitor is formed using two metallic plates each of surface area $100mm^2$ separated by a distance of $2mm$. Suppose the space between the plates is filled with a material of dielectric constant 2. If a voltage of $10V$ is applied across the capacitor, calculate the energy stored in the capacitor.
Given : permittivity of free space is $8\cdot85\times10^{-12}Fm^{-1}$.

প্ৰত্যেকৰে 100 *মিঃমিঃ*2 পৃষ্ঠ কালি বিশিষ্ট আৰু 2 *মিঃমিঃ* ব্যৱধানত ৰখা ধাতৱীয় ফলি ব্যৱহাৰ কৰি এখন ধাৰক বনোৱা হৈছে। ফলি দুখনৰ মাজভাগ 2 পৰা বৈদ্যুতিক ধ্ৰুৱকবিশিষ্ট এটা পদাৰ্থৰে পূৰ্ণ কৰা হৈছে। ধাৰকখনত $10V$ বিভৱ প্ৰয়োগ কৰিলে ইয়াত নিহিত শক্তিৰ মান কিমান? প্ৰদত্ত যে বায়ুশূন্য স্থানত বৈদ্যুতিক প্ৰৱেশ্যতাৰ মান $8\cdot85\times10^{-12}$ ফেৰাড/মিটাৰ।

(g) Give a brief discussion on the effect of an external magnetic field on a ferromagnetic material.

এটা লৌহচুম্বকীয় পদাৰ্থৰ ওপৰত এখন বাহ্যিক চৌম্বিক ক্ষেত্ৰৰ প্ৰভাৱৰ বিষয়ে চমুকৈ আলোচনা কৰা।

(h) Obtain the expression for the electric field due to a uniformly charged solid sphere of radius R at a point outside the sphere using Gauss's theorem of electrostatics.

গাউছৰ সূত্ৰটো ব্যৱহাৰ কৰি R ব্যাসাৰ্ধৰ সুষমভাৱে আধানযুক্ত গোটা গোলক এটাৰ বাহিৰৰ এটা বিন্দুত বিদ্যুত ক্ষেত্ৰ প্ৰাবল্যৰ প্ৰকাশৰাশি উলিওৱা।

4. Answer ***any one*** of the following questions : 10×1=10

তলত দিয়া প্ৰশ্নবোৰৰ *যিকোনো এটাৰ* উত্তৰ দিয়া ঃ

(a) The equation of motion of a simple harmonic oscillator of mass m and natural frequency ω_0 is given by,

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2} + \omega_0^2\, x(t) = f\cos\omega t$$

where $x(t)$ is its position at time t and f is a constant. Given : at $t = 0$, $x = 0$ and $\frac{dx}{dt} = 0$. Find $x(t)$.

m ভৰৰ আৰু ω_0 প্ৰাকৃতিক কম্পনাংক বিশিষ্ট এটা সৰল পৰ্য্যাবৃত দোলকৰ গতিৰ সমীকৰণটো তলত দিয়া ধৰণৰ।

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2} + \omega_0^2\, x(t) = f\cos\omega t$$

য'ত $x(t)$ ইয়াৰ t সময়ৰ অৱস্থান আৰু f এটা ধ্ৰুৱক ৰাশি। দিয়া আছে ঃ $t = 0$ ত $x = 0$ আৰু $\frac{dx}{dt} = 0$ ।

তেতিয়া $x(t)$ নিৰ্ণয় কৰা।

(b) A sinusoidal e.m.f. of amplitude V_0 and angular frequency ω is applied to a series inductor–capacitor–resistor (L–C–R) circuit. Find an expression for the impedance of the circuit. At what condition does the circuit become purely resistive ? 8+2=10

V_0 শীৰ্ষমান আৰু ω কৌণিক কম্পনাংকবিশিষ্ট ছিনুছয়ডেল e.m.f. টো এটা শ্ৰেণীবদ্ধ আৱেশক কুণ্ডলী-ধাৰক-ৰোধক (L–C–R) বৰ্তনীৰ প্ৰয়োগ কৰা হৈছে। বৰ্তনীটোৰ প্ৰতিবাধাৰ প্ৰকাশ ৰাশি উলিওৱা। কি চৰ্ত সাপেক্ষে ই এটা বিশুদ্ধ ৰোধকীয় বৰ্তনী হৈ পাৰে?

(c) State the Biot-Savart's law. Derive an expression for magnetic field at a point on the axis of a circular current loop. 2+8=10

বায়ট-চাভাৰ্টৰ সূত্ৰটো কি? বৈদ্যুতিক প্ৰৱাহ চালিত বৃত্তাকাৰ কুণ্ডলী এটাৰ অক্ষত অৱস্থিত কোনো এটা বিন্দুত চৌম্বিক ক্ষেত্ৰৰ প্ৰকাশ ৰাশি উলিওৱা।

(d) For an electric dipole, establish the following relation :

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 r^3}\left[\frac{3(\vec{p}\cdot\vec{r})\vec{r}}{r^2} - \vec{p}\right]$$

where $\vec{E}$ is the electric field, $\vec{p}$ is the dipole moment, ε_0 is the permittivity of free space and r is the distance from the centre of the line joining the two charges of the dipole to the electric field.

এটা বৈদ্যুতিক দ্বিমেৰুৰ বাবে তলৰ সম্পৰ্কটো প্ৰতিস্থা কৰা।

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 r^3}\left[\frac{3(\vec{p}\cdot\vec{r})\vec{r}}{r^2} - \vec{p}\right]$$

য'ত $\vec{E}$ বৈদ্যুতিক ক্ষেত্ৰ, $\vec{p}$ দ্বিমেৰু ভ্ৰামক, ε_0 বায়ুশূন্য স্থানৰ বৈদ্যুতিক প্ৰৱেশ্যতা আৰু r হৈছে দ্বিমেৰুটোৰ আধান দুটাক সংযোজিত ৰেখাডালৰ মধ্যৱৰ্তী বিন্দুৰ পৰা বৈদ্যুতিক ক্ষেত্ৰখনলৈ দূৰত্ব।